DEVOIR À LA MAISON N$^{\text{o}}$ 1 DE MATHÉMATIQUES
Terminale spé M5
À rendre le jeudi 16 septembre

EXERCICE 1. En utilisant seulement les propriétés suivantes,

- la fonction dérivée de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction constante égale à 1 ;
- si u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$;

démontrer par récurrence que $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée : $x \mapsto nx^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

EXERCICE 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

① On suppose $u_1 \leq u_0$. Montrer par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Qu'en conclure ?

② Si $u_1 \geq u_0$, que dire de (u_n) ? (pas de démonstration demandée)

EXERCICE 3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$

Et la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \dfrac{2^{n+1} - 2n - 3}{2^n}$

EXERCICE 4. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1) \times n$

Démontrer que l'on a $S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$

EXERCICE 5. Pour chacune des suites suivantes :

- Dire si elle est arithmétique ou géométrique et préciser sa raison
- Donner sa forme explicite.
- Donner son premier terme et une définition par récurrence.
- Exprimer $u_0 + \cdots + u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(certaines de ces informations sont contenues dans l'énoncé...)

① $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

② $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_0 = -1$ et $b_{n+1} = 3b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

③ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $c_n = \frac{n+1}{3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

④ $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d_0 = -1$ et $d_{n+1} = d_n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

⑤ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique telle que $e_3 = 5$ et $e_8 = 20$.

⑥ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison 2 telle que $f_3 = 128$.

⑦ $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 4.

⑧ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique telle que $h_{10} = 10$ et $h_{12} = 20$.